Kurzfassung der Dissertation

Concept Approximations

Approximative Notions for Concept Lattices*

Christian Meschke

27. Januar 2012

Im alltäglichen Sprachgebrauch versteht man unter einer Approximation eines Objekts ein weiteres Objekt, welches zum erstgenannten ähnlich aber verschieden ist. Im Unterschied dazu ist im mathematischen Sprachgebrauch Gleichheit durchaus erlaubt. Ein Objekt ist nach dieser Auffassung also auch eine Approximation seiner selbst. Des Weiteren ist bei Approximationen in der Mathematik die Ähnlichkeit zwischen Dingen meist durch eine Art Metrik beschrieben. Demzufolge ist ein Objekt eine Approximation eines anderen Objekts falls der durch die Metrik gegebene Abstand zwischen beiden Objekten hinreichend klein ist.

Die vorliegende Arbeit beschreibt eine andere Auffassung von Approximationen. Unter der zugrundeliegenden Voraussetzung, dass die Menge der zu approximierenden Objekte einen vollständigen Verband bildet, wird weiter angenommen, dass die beste untere und die beste obere Approximation durch einen Kernoperator $\lfloor\cdot\rfloor$ bzw. durch einen Hüllenoperator $\lceil\cdot\rceil$ auf dem vollständigen Verband beschrieben wird. Unter diesen Annahmen ist es möglich, die Verbandsordnung auf einen "Verband von Approximationen" zu übertragen. Letzterer wird von der Menge der Approximationen $(\lfloor x\rfloor, \lceil x\rceil)$ der Verbandselemente x erzeugt. Auf den auf diese Weise entstehenden *Approximationsverbänden* liegt das Hauptaugenmerk dieser Arbeit.

Unter einem *Kern-Hüllen-Paar* auf einem vollständigen Verband verstehenen wir ein Paar $(\lfloor\cdot\rfloor, \lceil\cdot\rceil)$ bestehend aus einem Kernoperator $\lfloor\cdot\rfloor$ und einem Hüllenoperator $\lceil\cdot\rceil$. Kern-Hüllen-Paare bieten die Möglichkeit, eine gegebene Verbandsstruktur zu vergröbern. Angeregt zur Untersuchung derartiger Kern-Hüllen-Paare wurden wir durch die Rough Set Theory, in welcher Verbände von Approximationen traditionell eine Rolle spielen. Für den klassischen Fall sei vorausgesetzt, man habe eine Äquivalenzrelation Θ auf einer Grundmenge U. Teilmengen $A \subseteq U$ werden nun wie folgt approximiert. Die untere Approximation $\lfloor A\rfloor_\Theta$ umfasst genau die Elemente, deren Äquivalenzklasse vollständig in A enthalten ist. Die obere Approximation $\lceil A\rceil_\Theta$ besteht hingegen genau aus den Elementen, deren Äquivalenzklasse einen nichtleeren Schnitt mit A besitzt. Das auf

*Deutsche Übersetzung des Titels: *Approximationen in Begriffsverbänden.*

diese Weise beschriebene Kern-Hüllen-Paar $(\lfloor\cdot\rfloor_\Theta, \lceil\cdot\rceil_\Theta)$ auf dem Potenzmengenverband $(\mathfrak{P}(U), \subseteq)$ besitzt die Besonderheit, dass die Paare $(\lfloor A\rfloor_\Theta, \lceil A\rceil_\Theta)$ mit $A \subseteq U$ komponentenweise geordnet bereits einen vollständigen Verband bilden. Ersetzt man jedoch diese speziellen, durch eine Äquivalenzrelation Θ beschriebenen Kern-Hüllen-Paare durch beliebige Kern-Hüllen-Paare auf $(\mathfrak{P}(U), \subseteq)$, so geht diese Eigenschaft verloren. Bernhard Ganter schlug daher in [Gan08] vor, den zu einem Kern-Hüllen-Paar gehörigen Approximationsverband als den vollständigen Unterverband von $\mathcal{K} \times \mathcal{C}$ aufzufassen, der von den Paaren $(\lfloor A\rfloor, \lceil A\rceil)$ mit $A \subseteq U$ erzeugt wird. Dabei bezeichnet $\mathcal{K}$ das zum Kernoperator $\lfloor\cdot\rfloor$ gehörige Kernsystem und $\mathcal{C}$ das zum Hüllenoperator $\lceil\cdot\rceil$ gehörige Hüllensystem.

Nachdem in [Gan08] also die klassischen Kern-Hüllen-Paare der Rough Set Theory durch beliebige ersetzt wurden, war es ein naheliegender Schritt, die zugrundeliegenden Potenzmengenverbände durch beliebige vollständige Verbände zu ersetzen. Die daraus resultierende Theorie der Approximationen in vollständigen Verbänden soll in der vorliegenden, in vier Kapitel untergliederten Arbeit vorgestellt werden. In Kapitel 1 werden die benötigten grundlegenden Definitionen und Aussagen aus Ordnungs- und Verbandstheorie sowie der Formalen Begriffsanalyse bereitgestellt.

Das zweite Kapitel umfasst eine allgemeine Theorie der Approximationen in vollständigen Verbänden. Den dort ausgeführten Überlegungen liegt zumeist ein vollständiger Verband L und ein *Kern-Hüllen-Paar* (K, C), bestehend aus einem Kernsystem $K \subseteq L$ and einem Hüllensystem $C \subseteq L$, zugrunde. Der zugehörigen Kern- bzw. Hüllenoperator wird mit $\lfloor\cdot\rfloor$ bzw. mit $\lceil\cdot\rceil$ bezeichnet. Analog zu [Gan08] ist der daraus resultierende *Approximationsverband* definiert als der von der Menge $\{(\lfloor x\rfloor, \lceil x\rceil) \mid x \in L\}$ der *materiellen* Approximationen erzeugte vollständige Unterverband von $K \times C$. Demzufolge ist es durchaus denkbar, dass es für eine Approximation (k, c) kein Element $x \in L$ gibt, so dass $(k, c) = (\lfloor x\rfloor, \lceil x\rceil)$ gilt. Eine derartige Approximation nennen wir *induziert*. Approximationen sind stets Paare der Form (k, c) mit $k \in K$, $c \in C$ und $k \leq c$. Es stellt sich heraus, dass die Frage ob ein solches Paar $(k, c) \in K \times C$ mit $k \leq c$ eine Approximation ist, in zufriedenstellender Weise durch vollständige Toleranzrelationen beantwortet werden kann. Die sogenannte *Beschränkungstoleranz* eines Kern-Hüllen-Paars beschreibt nämlich, ob zwei Element ähnlich genug sind, um in einer gemeinsamen Approximation enthalten zu sein oder nicht.

Das dritte und längste Kapitel dient als Namensgeber für die vorliegende Arbeit. Es beschreibt Approximationen in Begriffsverbänden. Wie sich herausstellt, kann man die Approximationen in Begriffsverbänden als die *Spuren* auffassen, die die Begriffe in einem Teilkontext hinterlassen. Die Wahl eines Teilkontexts $\mathbb{S} = (H, N, I_{H,N})$ eines formalen Kontexts $\mathbb{K} = (G, M, I)$ entspricht dabei der Wahl eines Kern-Hüllen-Paares im Begriffsverband. Die Spur eines Begriffes (A, B) von $\mathbb{K}$ im *Ausschnitt* $\mathbb{S}$ ist dann definiert als das Paar $(A \cap H, B \cap N)$. Analog zu den Approximationverbänden erzeugen die Spuren der Begriffe nun einen *Verband begrifflicher Spuren*. Letztere bieten ein Werkzeug zur Betrachtung großer Begriffsverbände. Anstelle des Ansatzes den ganzen Begriffsverband zu betrachten, wählt man sich einen Teilkontext interessanter Gegenstände und Merkmale und betrachtet den resultierenden Verband der Spuren. Sollte diese Darstellung zu grob sein, fügt man weitere Gegenstände und Merkmale zum Ausschnitt hinzu. Sollte dann jedoch der Verband der Spuren zu groß und unübersichtlich werden, so bietet sich die Möglichkeit, in entsprechende Spuren hereinzuzoomen, um damit den Blickbereich zu verkleinern.

Des Weiteren wird in Kapitel 3 eine begriffsanalytische Darstellung der Approximationsverbände (bzw. der Verbände begrifflicher Spuren) vorgestellt. Diese ermöglicht es in diesem Zusammenhang, bereits vorhandene Softwarewerkzeuge der Formalen Begriffsanalyse zu benutzen.

Das vierte und letzte Kapitel widmet sich den Approximationen in Potenzmengenverbänden, welche wir in Anlehnung an die Notationen der Rough Set Theory [Paw92] einfach *Rough Sets* (dt. *grobe Mengen*) nennen. Wie bereits erwähnt, wurden diese bereits als *Rough Set Abstractions* in [Gan08] eingeführt. Insbesondere interessieren wir uns dabei für *selbstduale* Kern-Hüllen-Paare. Dies sind genau solche Paare $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$, für welche gilt, dass eine Teilmenge genau dann ein Kern ist, wenn ihr Komplement eine Hülle ist. Diese Situation erlaubt es, die Komplementabbildung auf naheliegende Weise auf den Verband der Rough Sets zu übertragen. Im Spezialfall der von Jouni Järvinen und Sándor Radeleczki untersuchten, durch eine Quasiordnung gegebenen Rough Sets liefert die auf diese Weise entstehende algebraische Struktur sogar einen Darstellungssatz für Nelson-Algebren [JR11].

Die vorliegende Arbeit basiert in großen Teilen auf den beiden Beiträgen [Mes09, Mes10] zur International Conference on Formal Concept Analysis.

Literatur

[Gan08] Bernhard Ganter, *Lattices of Rough Set Abstractions as P-Products.*, ICFCA (Raoul Medina and Sergei A. Obiedkov, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 4933, Springer, 2008, pp. 199–216.

[JR11] Jouni Järvinen and Sándor Radeleczki, *Representation of Nelson Algebras by Rough Sets Determined by Quasiorders*, Algebra Universalis **66** (2011), 163–179.

[Mes09] Christian Meschke, *Robust Elements in Rough Set Abstractions*, ICFCA 2009 (S. Ferre and S. Rudolph, eds.), LNAI, no. 5548, Springer Verlag, 2009, pp. 114–129.

[Mes10] ———, *Approximations in Concept Lattices*, ICFCA (Léonard Kwuida and Baris Sertkaya, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 5986, Springer, 2010, pp. 104–123.

[Paw92] Zdisław Pawlak, *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1992.